Wykład monograficzny z fizyki jądrowej

Wzbudzenia kulombowskie – narzędzie do badania struktury jąder atomowych



Wykład 4 i 5

Katarzyna Wrzosek-Lipska



Plan wykładu

- Parametryzacja ruchu po orbicie → całka orbitalna.
- 2. Różniczkowy przekrój czynny dla różnych multipolowości.
- 3. Rachunek zaburzeń II rzędu:
 - a) człon interferencyjny
 - b) efekt reorientacji
- 4. Względne znaki elementów macierzowych.
- 5. Rozpad stanów wzbudzonych.
- 6. Program GOSIA.

Parametryzacja ruchu po orbicie

Amplituda wzbudzenia stanu k wyznaczona w I rzędzie rachunku zaburzeń:

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_P e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2\lambda + 1} (-1)^{I_0 - M_0} \begin{pmatrix} I_0 & \lambda & I_k \\ -M_0 & \mu & M_k \end{pmatrix} \langle I_0 \parallel \hat{M}(E\lambda) \parallel I_k \rangle I_{\lambda\mu}^E$$
(1)

• Całka orbitalna $I_{\lambda\mu}^{E}$ związana z całkowaniem po hiperbolicznej trajektorii Rutherforda:

funkcja zderzenia $S_{\lambda\mu}^{E}(t)$

$$I_{\lambda\mu}^{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i(E_{k} - E_{0})t}{\hbar}\right) r^{-\lambda - 1}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta(t), \varphi(t)) dt$$
(2)

 W mechanice klasycznej wprowadza się reprezentację parametryczną hiperboli, która jednocześnie określa pozycję pocisku i czas poprzez bezwymiarowy parametr w

$$\int_{a}^{b} r = a \cdot [\varepsilon \cosh w + 1];$$

$$t = a/v \cdot [\varepsilon \sinh w + w]$$

$$\varepsilon = 1/\sin(\theta/2); \quad a = \frac{Z_p Z_t e^2}{m_0 v^2} = \frac{1}{2} d(\theta = 180^0)$$
(3)

W zakresie $w[-\infty;+\infty]$ cząstka porusza się po hiperboli i osiąga odległość największego zbliżenia dla w = t = 0. → Alder & Winther, Chapt. II.9

Całka orbitalna

• Funkcję zderzenia $S_{\lambda\mu}^{E}(t)$ można przedstawić poprzez **bezwymiarową funkcję zderzenia** $Q_{\lambda\mu}(\varepsilon, w)$:

$$Q_{\lambda\mu}(\varepsilon,w) = a^{\lambda} \frac{(2\lambda-1)!!}{(\lambda-1)!} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda+1}} \cdot S_{\lambda\mu}^{E}(w(t))$$

$$funkcja zderzenia S_{\lambda\mu}^{E}(t)$$

$$I_{\lambda\mu}^{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i(E_{k}-E_{0})t}{\hbar}\right) r^{-\lambda-1}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta(t),\varphi(t)) dt$$

(4)

3)

• Wyrażając całkę orbitalną $I_{\lambda\mu}^{E}$ przez bezwymiarową funkcję zderzenia $Q_{\lambda\mu}(\varepsilon, w)$ można wydzielić człon $R_{\lambda\mu}(\vartheta, \xi)$ związany z wielkością orbity:



Prawdopodobieństwo wzbudzenia w I rzędzie rachunku zaburzeń

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_{P} e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2\lambda + 1} (-1)^{I_{0} - M_{0}} \begin{pmatrix} I_{0} & \lambda & I_{k} \\ -M_{0} & \mu M_{k} \end{pmatrix} \langle I_{0} \parallel \hat{M}(E\lambda) \parallel I_{k} I_{\lambda\mu}^{E}$$

$$I_{\lambda\mu}^{E} = \frac{1}{a^{\lambda} v} \frac{(\lambda - 1)!}{(2\lambda - 1)!!} \cdot \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{\pi}} \cdot R_{\lambda\mu}(\theta, \xi)$$

$$P_{k} = \frac{1}{2I_{0} + 1} \sum_{M_{k}M_{0}} |a_{k0}^{2}|$$

$$P_{k} = \sum_{\lambda} |\chi_{n \to k}^{(\lambda)}|^{2} \sum_{\mu} |R_{\lambda\mu}(\theta, \xi)|^{2}$$

$$R^{2}_{\lambda}(\theta, \xi)$$

$$\chi_{n \to k}^{\lambda} = \frac{\sqrt{16\pi}(\lambda - 1)!}{(2\lambda + 1)!!} \left(\frac{Z_{T/P}}{\hbar v}\right) \frac{\langle I_{0} \parallel \hat{M}(E\lambda) \parallel I_{k} \rangle}{a^{\lambda} \sqrt{2I_{0} + 1}}$$
(8)

prawdopodobieństwo wzbudzenia stanu $k \sim M(E\lambda) \sim B(E\lambda)$ ("strength parameter")

Elektryczny przekrój czynny na wzbudzenie st*anu k* I rząd rachunku zaburzeń

$$P_{n \to k}^{(1)}(\theta, \xi) = \sum_{\lambda} |\chi_{n \to k}^{(\lambda)}|^2 R_{\lambda}^2(\theta, \xi)$$

$$d\sigma_{E\lambda,k} = \underbrace{\frac{1}{4} a^2 \sin^{-4}(\theta/2) d\Omega}_{\text{Rutherford}} \underbrace{\chi_{i \to k}^{E\lambda}}_{\lambda=1,\infty} |Z_{i \to k}^{E\lambda}|^2 R_{\lambda}^2(\theta, \xi)$$

$$= \left(\frac{Z_{P/T}e}{\hbar v}\right)^2 \sum_{\lambda=1,\infty} a^{-2(\lambda-1)} B(E\lambda; I_n \to I_k) df_{E\lambda}(\theta, \xi)$$

$$a = \frac{Z_p Z_t e^2}{m_0 v^2}$$

Funkcja różniczkowego przekroju czynnego (differential cross section function):

$$df_{E\lambda}(\vartheta,\xi) = 4\pi \left| \frac{(\lambda-1)!}{(2\lambda+1)!!} \right|^2 R_{\lambda}^2(\vartheta,\xi) \sin^{-4}(\frac{1}{2}\vartheta) d\Omega$$

Magnetyczny przekrój czynny

$$d\sigma_{M\lambda} = \frac{1}{4}a^{2}\sin^{-4}(\vartheta/2)d\Omega\sum_{\lambda=1,\infty}|\chi_{i\to f}^{M\lambda}|^{2}R_{\lambda}^{2}(\vartheta,\xi)$$

$$= \left(\frac{Z_{P/T}e}{\hbar c}\right)^2 \sum_{\lambda=1,\infty} a^{-2(\lambda-1)} B(M\lambda; I_n \to I_k) df_{M\lambda}(\vartheta, \xi)$$

- Wzbudzenie danego stanu poprzez przejście magnetyczne znacznie słabsze (czynnik v/c) w porównaniu ze wzbudzeniem elektrycznym
- dodatkowo: zredukowane prawdopodobieństwa przejść B(Mλ) < B(Eλ)

Funkcja różniczkowego przekroju czynnego df $_{F\lambda}(\vartheta,\xi)$







• $d\sigma_{M\lambda} < d\sigma_{E\lambda}$ (ze względu na dodatkowy człon (v/c)² w $d\sigma_{M\lambda}$)

→ znacząca redukcja $d\sigma_{M\lambda}$ w porównaniu z $d\sigma_{E\lambda}$ (dodatkowo B(M1) < B(E2)). Przykłady:

> 200 Po+ 114 Cd @ ISOLDE : $d\sigma_{E2} \sim 10^3 \cdot d\sigma_{M1}$ (PhD thesis of N. Kesteloot, KU Leuven)

➢ ⁶⁶Zn+ ²⁰⁸Pb @ LNL : dσ_{E2} (1 W. u.) ~**300** · dσ_{M1} (1 W.u.) (PhD thesis of M. Rocchini, Universita degli Studi di Firenze)





128
Xe+ 208 Pb (E=550 MeV)
 $\Delta E_{1-2} = 0.5$ MeV

$T\lambda$	$W_{\lambda} = \frac{B(\lambda)}{B_W(\lambda)}$	$\mathbb{R}^{2}_{\lambda} \cdot \chi^{\lambda}(1W.u.) * W$	V
E1	$2*10^{-5}$	0.00002	
M1	10^{-2}	0.00001	
E2	50	1.2	
E3	30	0.02	
E4	3	0.00007	

J.Srebrny, et al., Nuclear Physics A, 557:663, 1993.

wzbudzenia na drodze **E2 i E3** rozpad poprzez **E1, E2, M1**

przekrój czynny silnie zależy od ΔE , λ , v, $B(\lambda)$

Rachunek zaburzeń drugiego rzędu

Istotny gdy wzbudzanych jest kilka stanów jądrowych i gdy stany populowane są na drodze wzbudzenia wielostopniowego.



Rachunek zaburzeń drugiego rzędu

$$\begin{split} P_{i \rightarrow f}^{(2)} &= P^{(11)} + P^{(12)} + P^{(22)} & I_{n} \xrightarrow{1} P_{i \rightarrow f}^{(11)} &= \sum_{\lambda} |\chi_{i \rightarrow f}^{(\lambda)}|^{2} \sum_{\mu} R_{\lambda\mu}^{2} (\mathcal{G}, \xi_{i \rightarrow f}) & I_{f_{i}} \xrightarrow{1} P_{i \rightarrow f}^{(12)} \\ P_{i \rightarrow f}^{(12)} &\sim \sum_{\lambda} \chi_{i \rightarrow f}^{(\lambda)} \chi_{i \rightarrow n}^{(\lambda)} \chi_{n \rightarrow f}^{(\lambda)} & \cdots & P_{i \rightarrow f}^{(12)} \\ &\sum_{\mu} R_{\lambda\mu}^{*} (\mathcal{G}, \xi_{i \rightarrow f}) G_{\lambda\mu} (\mathcal{G}, \xi_{i \rightarrow n}, \xi_{n \rightarrow f}) \\ P_{i \rightarrow f}^{(22)} &\sim \sum_{\lambda} |\chi_{i \rightarrow n}^{(\lambda)}|^{2} |\chi_{n \rightarrow f}^{(\lambda)}|^{2} & \cdots \\ &\sum_{\mu} R_{\lambda\mu}^{2} (\mathcal{G}, \xi_{i \rightarrow f}) G_{\lambda\mu}^{2} (\mathcal{G}, \xi_{i \rightarrow n}, \xi_{n \rightarrow f}) \\ \end{split}$$

 $P^{(22)}$ istotne gdy prawdopodobieństwo bezpośredniego, jednostopniowego wzbudzenia $\chi_{i \rightarrow f}$ jest małe lub wzbronione: $\chi_{i \rightarrow f} << \chi_{i \rightarrow n} \chi_{n \rightarrow f}$

Adopted after: W. Korten Euroschool Leuven, September 2009, https://www.euroschoolonexoticbeams.be/site/files/2009_Korten_Lecture_Part_2.ppt



Przykład 2: wzbudzenie stanu 4+



Dwustopniowe wzbudzenie E2 stanu 4⁺



Wzbudzenie 1-stopniowe vs 2-stopniowe: stan 2⁺₂

Często bezpośrednie wzbudzenie jednostopniowe konkuruje ze wzbudzeniem przez stan pośredni.



Wpływ znaku członu interferencyjnego

Względna populacja stanów wzbudzonych jądrze ¹¹⁰Ru w eksperymencie ¹¹⁰Ru + ²⁰⁸Pb @ 430MeV



Dla dużych kątów rozproszenia populacja stanu 2^+_2 silnie zależy od znaku członu interferencyjnego < $0^+_1 \mid\mid E2 \mid \mid 2^+_1 > < 2^+_1 \mid\mid E2 \mid\mid 2^+_2 > < 2^+_2 \mid\mid E2 \mid\mid 0^+_1 >$

M. Zielińska, L. P. Gaffney, K. Wrzosek-Lipska et al., Eur. Phys. J. A 52, 99 (2016)

Efekt reorientacji

Szczególnym przypadkiem wzbudzenia dwustopniowego jest przypadek gdy stan pośredni I_n jest **podstanem magnetycznym M_f**.



W przypadku gdy $I_i = 0^+$ oraz $I_f = 2^+$:

1-stopniowe wzbudzenie

$$E2 0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{1}$$

 $P_{0 \rightarrow 2}^{(2)}(\vartheta, \xi) = \left(\chi_{0 \rightarrow 2}^{(2)} \mid^{2} R_{\lambda}^{2}(\vartheta, \xi) \left[1 + \chi_{2 \rightarrow 2}^{(2)} c(\vartheta, s = 1, \xi)\right]$
 $\chi_{2 \rightarrow 2}^{(2)} = \frac{4}{15} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{Z_{P/T} e}{\hbar v} \frac{1}{a^{2}} \langle 2 \| M(E2) \| 2 \rangle$

Efekt reorientacji

Korzystając z pewnych szczególnych własności funkcji $c(\vartheta, s=1, \xi)$

 $(\rightarrow$ K. Alder & A. Winther "Electromagnetic excitation; Theory of Coulomb excitation with heavy ions" 1975, Chapter 5.6)

prawdopodobieństwo P(2⁺₁) można zapisać:

$$P_{2_{1}^{+}} = P_{2}^{(1)} \left[1 + q \cdot K(\vartheta, \xi) \right]$$

$$q = \frac{A_p \Delta E \langle 2_1^+ || E2 || 2_1^+ \rangle}{Z_p (1 + A_p / A_t)}$$





M. Zielińska, L. P. Gaffney, K. Wrzosek-Lipska et al., Eur. Phys. J. A 52, 99 (2016)

Względne znaki elementów macierzowych

- Przekrój czynny na wzbudzenie kulombowskie jest czuły na względne znaki elementów macierzowych → wynik interferencji między 1- i 2- (wielo-) stopniowym wzbudzeniem.
- Znak członu interferencyjnego (znak iloczynu elementów macierzowych) jest obserwablą.
- Szczególny przypadek wzbudzenia 2-stopniowego efekt reorientacji gdzie stanem pośrednim jest podstan magnetyczny m → znak elementu diagonalnego (~ Q_s) jest obserwablą.



Obliczenia: M. Zielińska

Wzbudzenie 2-stopniowe stanu 0⁺₂ vs efekt reorientacji

- Całkowity przekrój czynny $\sigma(2_1^+)$ zależy od < $2_1^+||E2|| 0_1^+> \text{ oraz} < 2_1^+||E2|| 2_1^+>$.
- Wpływ nieznanego elementu $< 2^+_1 ||E2|| 0^+_2 > na \sigma(2^+_1)$ jest mniejszy przy energii 205 MeV niż przy maksymalnej energii bezpiecznej 243 MeV.
- Całkowity przekrój czynny σ(2⁺₁) rośnie wraz z rosnącą energią wiązki, ale czułość na Q_s maleje, z uwagi na blisko leżący stan 0⁺₂.
- Aby zyskać czułość na wyznaczenie Q_s dla ⁷²Kr należałoby zmniejszyć energię wiązki.



⁷²Kr +¹¹⁰Pd (ISOLDE) @ 205 MeV

Wzbudzenie E1 poprzez gigantyczny rezonans (GDR)

- W eksperymentach wzbudzeń kulombowskich wysoko leżące stany GDR nie są obserwowane.
- Możliwe jest wzbudzenie wirtualne stanu I_f poprzez stany GDR.
- GOSIA: korekta na tego typu efekty (*E1 polarizability*) kwadrupolowa część oddziaływania V(E2) pomnożona przez czynnik:

$$1 - d \cdot \frac{E_p A_t}{Z_t^2 (1 + A_p / A_t)} \frac{a}{r}$$

gdzie *d* = 0.005 – *E1 polarisation strength*

(empiryczna wartość wyznaczona z pomiarów przekroju czynnego na absorpcję fotojądrową w eksperymentach γγ') *Alder and Winther (appendix J)*

 Może wpływać na populację wysoko leżących stanów jądrowych wzbudzanych kulombowsko;

np.: ¹⁰⁴Ru – zmiana populacji stanu 10⁺ na poziomie 10% jeśli wpływ od wzbudzeń wirtualnych poprzez stany GDR jest zwiększony dwukrotnie.



Realia eksperymentalne

 Proste przypadki – populacja stanów na drodze wyłącznie 1- lub 2stopniowej są rzadkie.

(gł. wiązki egzotyczne → Coulex@ISOLDE ~2.8 MeV/A)

- Najczęściej mamy do czynienia ze wzbudzeniem wielostopniowym.
- Stany wzbudzone populowane są poprzez różne stany pośrednie.
- W analizie uwzględnia się różne możliwe drogi wzbudzenia danego stanu jądrowego.
- Prawdopodobieństwo wzbudzenia danego stanu zależy od wielu elementów macierzowych.
- Układ sprzężonych równań różniczkowych na amplitudy wzbudzeń rozwiązywany numerycznie → GOSIA.



Różne drogi wzbudzenia stanu 2⁺₃ poprzez przejścia E2:

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{1} \rightarrow 0^{+}_{2} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{2} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{2} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

$$0^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{1} \rightarrow 4^{+}_{1} \rightarrow 2^{+}_{3}$$

....

Rozpad stanów wzbudzonych

- W zredukowanym elemencie macierzowym < I_f ||M(Tλ)|| I_i > zawarta jest informacja o wpływie struktury jądra na prawdopodobieństwo przejść γ.
- Prawdopodobieństwo rozpadu stanu wzbudzonego drogą emisji kwantu γ zależy zarówno od multipolowości *T λ* oraz energii przejścia *E_ν*

$$P(T\lambda; I_i \to I_f) = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda\left((2\lambda+1)!!\right)^2} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{E_{\gamma}}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \cdot B(T\lambda; I_i \to I_f)$$

Z kolei zredukowane prawdopodobieństwo przejscia B(T λ; I_f → I_i) wyraża się bezpośrednio przez zredukowany element macierzowy:

$$B(T\lambda; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f \| \hat{M}(T\lambda) \| I_i \rangle|^2$$

$$B(\lambda, I_f \to I_i) = \frac{2I_i + 1}{2I_f + 1} B(\lambda, I_i \to I_f)$$

Proces wzbudzenia jak i deekscytacji stanów jądrowych opisuje **ten sam** zestaw elementów macierzowych.

Dane spektroskopowe:

czas życia:

$$= \frac{1}{\sum_{\lambda,f} |i^{n(\lambda)} \sqrt{P(T\lambda; I_i \to I_f)}|^2}$$

1

przejścia elektryczne: $n(\lambda) = \lambda$

przejścia magnetyczne: $n(\lambda) = \lambda + 1$

$$P(T\lambda; I_i \to I_f) = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda \left((2\lambda+1)!! \right)^2} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{E_{\gamma}}{\hbar c} \right)^{2\lambda+1} \cdot B(T\lambda; I_i \to I_f)$$

$$B(T\lambda; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f \| \hat{M}(T\lambda) \| I_i \rangle|^2$$

- współczynnik zmieszania: $\delta(E2/M1) = 0.835 \cdot E_{\gamma} \cdot \frac{\langle I_f \| E2 \| I_i \rangle}{\langle I_f \| M1 \| I_i \rangle}$ E2 [eb], M1 [µ_N], E_γ [MeV]
- współczynnik rozgałęzienia przejść γ:

$$R = \frac{E_{\gamma_1}^{(2\lambda+1)} \cdot |\langle I_{f1} \| \mathsf{M}(\mathsf{E2}) \| I_i \rangle|^2}{E_{\gamma_2}^{(2\lambda+1)} \cdot |\langle I_{f2} \| \mathsf{M}(\mathsf{E2}) \| I_i \rangle|^2} \cdot \frac{1 - \delta_{\gamma_1}^{-2}}{1 - \delta_{\gamma_2}^{-2}}$$





Liczba elementów macierzowych vs liczba danych eksperymentalnych

- Liczba elementów macierzowych większa niż liczba obserwowanych przejść γ.
- Różnorodny wpływ poszczególnych elementów macierzowych na populację danego stanu.
 w analizie danych wykorzystuje się zależność przekroju czynnego od kąta rozproszenia.
- Pomocnym jest użycie dodatkowych danych spektroskopowych:
 - czasy życia,
 - współczynniki rozgałęzień przejść γ,
 - współczynniki zmieszania np.: δ (E2/M1).



¹⁰⁰Mo

Niekiedy, w rzadkich przypadkach, stosuje się teoretyczne przewidywania dotyczące sprzężeń pomiędzy elementami macierzowymi.

Prezentacja M. Zielińska , Gosia workshop 9-11.04



- Dla zadanego schematu poziomów jądrowych program GOSIA pozwala na dopasowanie zestawu elementów macierzowych do zmierzonych intensywności przejść γ, uwzględniając także inne dostępne dane spektroskopowe charakteryzujące badane jądro.
- Dla określonej kinematyki rozproszenia (zdefiniowanej poprzez geometrię detektorów) i dla danego zestawu elementów macierzowych rozwiązywany jest metodami numerycznymi układ sprzężonych równań różniczkowych na amplitudy wzbudzeń, wyliczana jest populacja stanów oraz intensywności przejść promieniowania γ.
- Uwzględnia się także szereg zjawisk wpływających na intensywności przejść γ:
 - zjawisko konwersji wewnętrznej,
 - skończone rozmiary detektorów germanowych,
 - efekt jądrowej deorientacji (oddziaływaniem momentu magnetycznego jądra z kaskadą elektronów w silnie zjonizowanych wybitych z tarczy atomach → depolaryzacje jądrowych stanów wzbudzonych → rozmyciem rozkładów kątowych promieniowania γ).
- Wyliczone intensywności porównuje się ze zmierzonymi w eksperymencie.
- Dodatkowo bada się zgodność innych eksperymentalnych danych spektroskopowych.



Podsumowanie (1/2)

- Prawdopodobieństwo wzbudzenia kulombowskiego P(I^{π}) rośnie wraz z \rightarrow rosnącym parametrem χ (strength parameter) t.j. Z_{P/T}, M($\sigma\lambda$), E \rightarrow rosnącym kątem rozproszenia t.j. θ_{cm} \rightarrow malejącym parametrem ξ (adiabacity parameter) t.j. ΔE , a/v.
- Rozkład kątowy różniczkowego przekroju czynnego $d\sigma(\theta)/d\Omega$ zależy w sposób zróżnicowany od multipolowość λ i parametru ξ
 - możliwość rozróżnienia różnych multipolowości przejść (E2/M1, E2/E3 etc.)
- Całkowity przekrój czynny σ_{tot} jest o 2-3 rzędy wielkości mniejszy dla przejść magnetycznych w porównaniu do przejść elektrycznych.
- Przejścia E2 i E3 są kilkadziesiąt razy przyśpieszone w stosunku do przewidywań modelu jednocząstkowego → wzbudzenie kulombowskie danego stanu odbywa się na drodze E2 i E3, rozpad zaś poprzez przejścia M1, E2, E1.

Podsumowanie (2/2)

- Prawdopodobieństwo wzbudzenia stanów populowanych na drodze 2- (wielo-) stopniowego wzbudzenia zależy od efektów drugiego rzędu momentów kwadrupolowych stanów wzbudzonych i znaku członów interferencyjnych
 → względne znaki elementów macierzowych są obserwablą eksperymentalną.
- W eksperymentach wzbudzeń kulombowskich stany populowane są poprzez różne stany pośrednie na drodze wzbudzenia wielostopniowego → układ sprzężonych równań różniczkowych na amplitudy wzbudzeń rozwiązywany numerycznie (program GOSIA).
- Proces wzbudzenia jak i deekscytacji stanów jądrowych opisuje ten sam zestaw elementów macierzowych.
- Dane spektroskopowe stanowią istotne więzy dla wielowymiarowej analizy danych pochodzących z eksperymentów wzbudzeń kulombowskich.