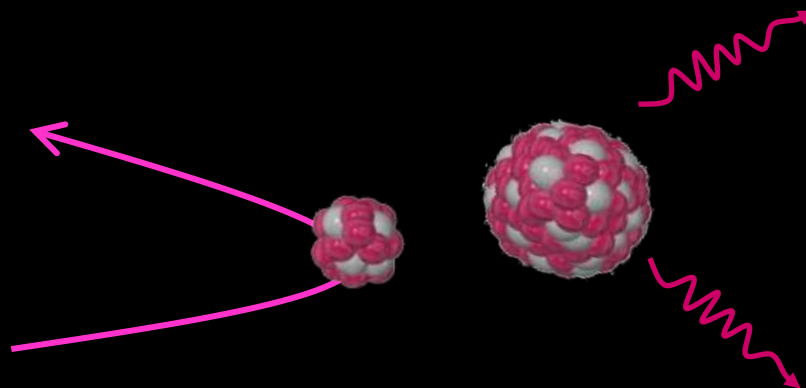


Wykład monograficzny z fizyki jądrowej

Wzbudzenia kulombowskie – narzędzie do badania struktury jąder atomowych



Wykład 3

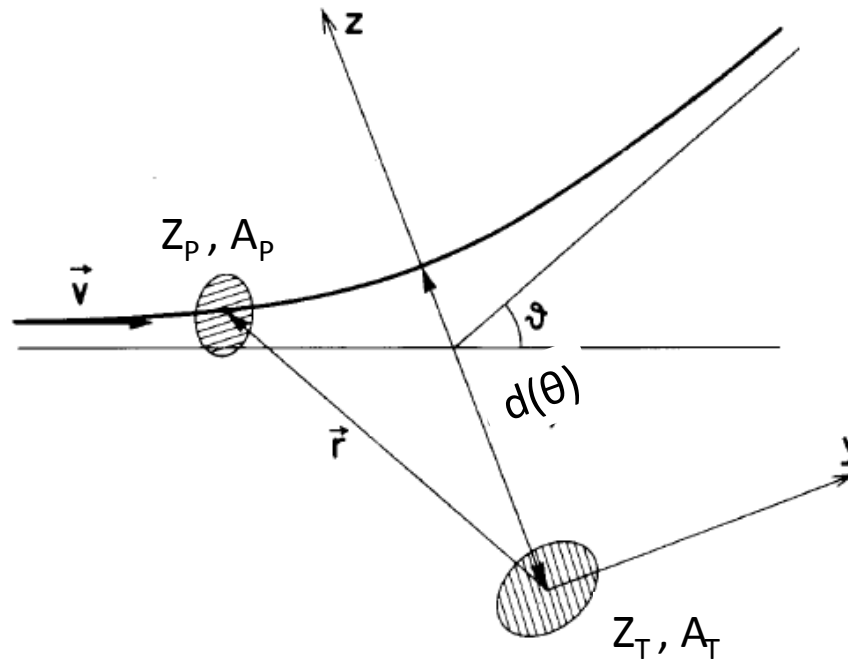
Katarzyna Wrzosek-Lipska



Plan wykładu

- Opis kwantowy procesu wzbudzenia kulombowskiego:
 - równanie Schroedingera;
 - układ równań sprzężonych na amplitudy wzbudzeń.
- Postać potencjału oddziaływania elektromagnetycznego:
 - rozwinięcie w szereg multipolowy;
 - operatory momentów multipolowych.
- Rachunek zaburzeń I rzędu $\rightarrow$ przekrój czynny na wzbudzenie kulombowskie danego stanu.

Formalizm procesu wzbudzenia kulombowskiego



- Opis kwantowy zjawiska wzbudzenia kulombowskiego wymaga rozwiązania **zależnego od czasu równania Schroedingera** z **Hamiltonianem H^0** (jądra tarczy i pocisku) oraz z **potencjałem $V(r, t)$** odpowiedzialnym za oddziaływanie kulombowskie **monopolu** jądra powodującego wzbudzenie z **multipolem** badanego jądra:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\vec{r}, t)\rangle = (\hat{H}^0 + \hat{V}(\vec{r}(t))) |\Psi(\vec{r}, t)\rangle \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\vec{r}, t)\rangle = (\hat{H}^0 + \hat{V}(\vec{r}(t))) |\Psi(\vec{r}, t)\rangle \quad (1)$$

- Rozwiązaniem powyższego równania jest kombinacja liniowa funkcji własnych swobodnego jadra ze współczynnikami zależnymi od czasu:

$$|\Psi(\vec{r}, t)\rangle = \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle \quad (2)$$

zależne od czasu współczynniki rozwinięcia energia stanu $|\varphi_n\rangle$ funkcje falowe swobodnego jadra

$$\hat{H}^0 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle \quad (3)$$

- Podstawiając (2) do (1) uzyskuje się równanie na współczynniki $a_n(t)$:

$$i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle = \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) \hat{V}(\vec{r}(t)) |\varphi_n\rangle \quad (4)$$

Formalizm procesu wzbudzenia kulombowskiego

$$i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) |\varphi_n\rangle = \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) \hat{V}(\vec{r}(t)) |\varphi_n\rangle \quad (4)$$

- Korzystając z warunku ortonormalności funkcji $|\varphi_n\rangle$ równanie (4) upraszcza się do:

$$\frac{d}{dt}a_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(t) \langle \varphi_k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | \varphi_n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k)t}{\hbar}\right) \quad (5)$$

- Powyższy układ równań sprzężonych na amplitudy wzbudzeń dla danego stanu końcowego $|k\rangle$ rozwiązuje się rozwijając **potencjał oddziaływania** w **szereg multipolowy**.

Potencjał oddziaływania elektromagnetycznego

Potencjał oddziaływania elektromagnetycznego można rozwinąć w szereg multipolowy:

$$V_{p-T}(r(t)) = Z_T Z_p e^2 / r(t)$$

człon monopol-monopol
(odpowiada za kinematykę zderzenia i opisuje trajektorię pocisków)

$$+ \sum_{\lambda\mu} V_p(E\lambda, \mu, r(t)) + \sum_{\lambda\mu} V_T(E\lambda, \mu, r(t))$$

oddziaływanie elektryczne
multipol-monopol dla jądra tarczy/pocisku,

$$+ \sum_{\lambda\mu} V_p(M\lambda, \mu, r(t)) + \sum_{\lambda\mu} V_T(M\lambda, \mu, r(t))$$

oddziaływanie magnetyczne dla jądra tarczy/pocisku (małe dla małych v/c)

$$+ O(\sigma\lambda, \sigma'\lambda' > 0)$$

człony wyższych rzędów oddziaływania
multipol-multipol
(zaniedbywalnie małe $\sim 0.5\%$)

- Wpływ oddziaływań o różnej multipolowości na proces wzbudzenia jest zróżnicowany.
- Oddziaływanie **elektryczne jest o 1 – 2 rzędów wielkości większe od magnetycznego.**
- Przejścia E2 i E3 są kilkadziesiąt razy przyspieszone w stosunku do przewidywań modelu s.p.
- wzbudzenia na drodze **E2/E3 są $10^3 \div 10^5$ razy silniejsze** względem innych multipolowości.

Potencjał oddziaływania

$$V_{p-T}(r(t)) = Z_T Z_p e^2 / r(t)$$

człon monopol-monopol (Rutherford)

$$+ \sum_{\lambda\mu} V_p(E\lambda, \mu, r(t)) + \sum_{\lambda\mu} V_T(E\lambda, \mu, r(t))$$

oddziaływanie elektryczne
multipol-monopol dla jądra tarczy/pocisku,

$$+ \sum_{\lambda\mu} V_p(M\lambda, \mu, r(t)) + \sum_{\lambda\mu} V_T(M\lambda, \mu, r(t))$$

oddziaływanie magnetyczne dla jądra
tarczy/pocisku (małe dla małych v/c)

$$+ O(\sigma\lambda, \sigma'\lambda' > 0)$$

człony wyższych rzędów oddziaływania
multipol-multipol (zaniedbywalnie małe ~0.5%)

$$V_{T/P}(E\lambda, \mu, \vec{r}(t)) = \frac{4\pi Z_{P/T} e}{2\lambda + 1} (-1)^\mu \cdot \frac{1}{r(t)^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\theta(t), \varphi(t)) \cdot \hat{M}_{T/P}(E\lambda, -\mu) \quad (6)$$

$$V_{T/P}(M\lambda, \mu, \vec{r}(t)) = \frac{4\pi Z_{P/T} e}{2\lambda + 1} (-1)^\mu \cdot \frac{1}{\lambda c} \frac{1}{r(t)^{\lambda+1}} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} (\vec{r} \times \nabla) Y_{\lambda\mu}(\theta(t), \varphi(t)) \cdot \hat{M}_{T/P}(M\lambda, -\mu) \quad (7)$$

 funkcja zderzenia $S_{\lambda,\mu}^T$

$$\hat{M}(E\lambda, \mu) = \int \rho(\vec{r}') \cdot r'^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) d^3 \vec{r}' \quad (8)$$

$$\hat{M}(M\lambda, \mu) = \frac{-i}{c(\lambda + 1)} \int j(\vec{r}') \cdot r'^\lambda \hat{L} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) d^3 \vec{r}' \quad (9)$$

- Potencjał oddziaływania (monopol-multipol; T – elektryczne/magnetyczne) :

$$\hat{V}(\vec{r}(t)) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{4\pi Z_{p/T} e}{2\lambda + 1} (-1)^{\mu} S_{\lambda\mu}^T(\vec{r}, t) \cdot \hat{M}(T\lambda, -\mu)_{T/P} \quad (10)$$

- Elementy macierzowe operatora momentu multipolowego można wyrazić przez **zredukowane elementy macierzowe** (twierdzenie Wignera-Eckarta):

$$\langle I_k, m_k | \hat{M}(T\lambda, \mu) | I_n, m_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2I_k + 1}} (I_n, m_n, \lambda, \mu | I_k, m_k) \langle I_k || \hat{M}(T\lambda) || I_n \rangle \quad (11)$$

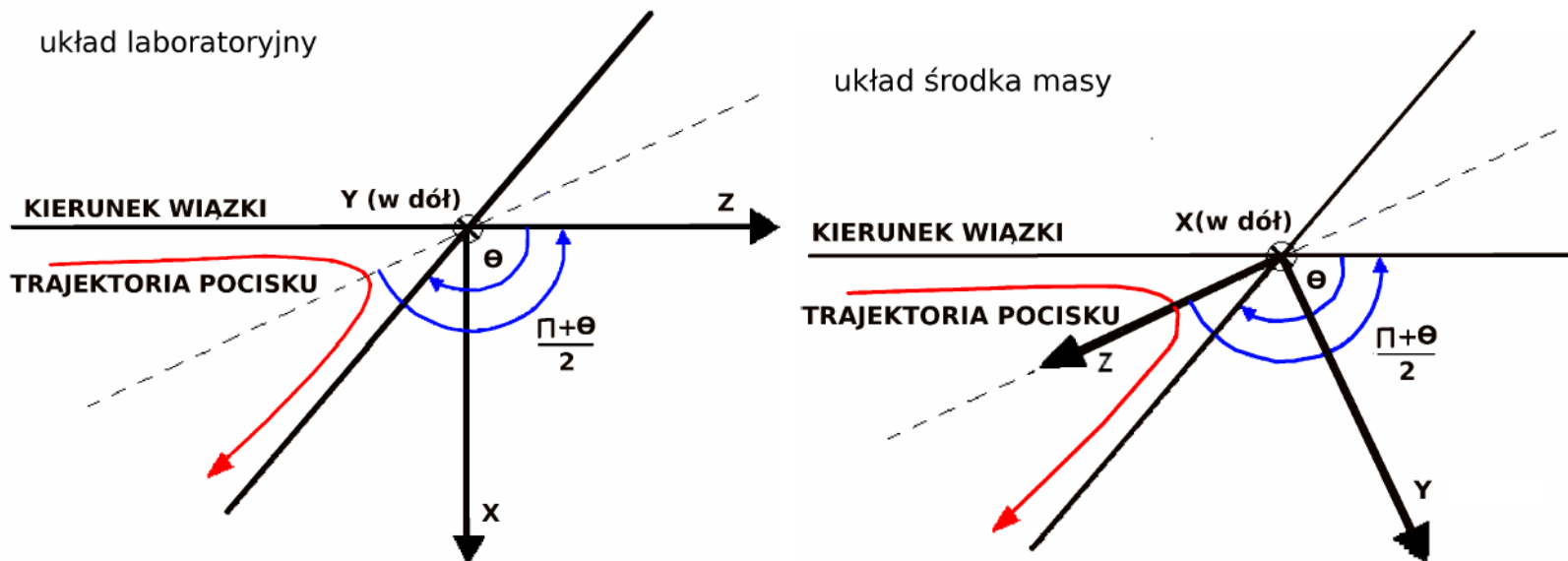
- Wstawiając postać potencjału podaną wzorem (10) do równania (5) na współczynniki $a_k(t)$ oraz korzystając z powyższego twierdzenia (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_k(t) &= \frac{i}{\hbar} \frac{4\pi Z_{p/T} e}{\sqrt{2I_k + 1}} \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k)t}{\hbar}\right) \times \\ &\times \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{(-1)^{\mu}}{2\lambda + 1} (I_n, m_n, \lambda, \mu | I_k, m_k) S_{\lambda\mu}^T(\vec{r}, t) \langle I_k || \hat{M}(T\lambda) || I_n \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_k(t) &= \frac{i}{\hbar} \frac{4\pi Z_{p/T} e}{\sqrt{2I_k + 1}} \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k)t}{\hbar}\right) \times \\ &\times \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{(-1)^{\mu}}{2\lambda + 1} (I_n, m_n, \lambda, \mu | I_k, m_k) S_{\lambda\mu}^T(\vec{r}, t) \langle I_k \| \hat{M}(T\lambda) \| I_n \rangle \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego równania dla poszczególnych amplitud pozwala wyznaczyć **obsadzenia stanów jądrowych po wzbudzeniu kulombowskim**.

Ponieważ w formalizmie wzbudzenia kulombowskiego pojawiają się człony zawierające funkcje zderzenia $S_{\lambda\mu}^T$, zatem wygodnie jest rozwiązywać powyższe równanie wzbudzenia w układzie środka masy, gdzie jedna z osi leży na symetralnej trajektorii.



Układ sprzężonych równań różniczkowych

$$\frac{d}{dt}a_k(t) = \frac{i}{\hbar} \frac{4\pi Z_{p/T} e}{\sqrt{2I_k + 1}} \sum_n a_n(t) \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k)t}{\hbar}\right) \times \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{(-1)^\mu}{2\lambda + 1} (I_n, m_n, \lambda, \mu | I_k, m_k) S_{\lambda\mu}^T(\vec{r}, t) \langle I_k || \hat{M}(T\lambda) || I_n \rangle \quad (13)$$

Zakłada się, iż przed reakcją jądro znajduje się w stanie podstawowym. Warunkiem początkowym dla równania (13) jest $a_k(t = -\infty) = \delta_{k0}$ (indeks 0 oznacza stan podstawowy). W stanie końcowym, w chwili $t = \infty$ amplitudy $a_k(t = \infty)$ określają **prawdopodobieństwo wzbudzenia P_k stanu $|k\rangle$ oraz przekrój czynny na wzbudzenie stanu $|k\rangle$:**

Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu zależny od czasu: $H(t) = H^0 + V(r,t)$

Równanie (5) jest równaniem dokładnym

$$\frac{d}{dt} a_k(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n(t) \langle \varphi_k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | \varphi_n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k) \cdot t}{\hbar}\right)$$

$V(r,t)$ jest potencjałem zaburzającym związanym z polem elektromagnetycznym. Efektem zaburzenia są przejścia układu pomiędzy stanami stacjonarnymi $|\varphi_n\rangle$.

Ile wynosi amplituda prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie własnym $|k\rangle$ w chwili czasu t , jeśli w chwili $t = 0$ był on w stanie własnym $|i\rangle$ hamiltonianu H^0 ?

W rachunku zaburzeń równanie (5) można zapisać jako zespół równań rekurencyjnych:

$$\frac{d}{dt} a_k^{(0)}(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} a_k^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n^{(0)}(t) \langle k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k) \cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{d}{dt} a_k^{(2)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n^{(1)}(t) \langle k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k) \cdot t}{\hbar}\right)$$

Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu zależny od czasu: $H(t) = H^0 + V(r,t)$

Równanie (5) jest równaniem dokładnym

$$\frac{d}{dt} a_k(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n(t) \langle \varphi_k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | \varphi_n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k) \cdot t}{\hbar}\right)$$

$V(r,t)$ jest potencjałem zaburzającym związanym z polem elektromagnetycznym.
Efektem zaburzenia są przejścia układu pomiędzy stanami stacjonarnymi $|\varphi_n\rangle$.

Ile wynosi amplituda prawdopodobieństwa znalezienia układu w stanie własnym $|k\rangle$ w chwili czasu t , jeśli w chwili $t = 0$ był on w stanie własnym $|i\rangle$ hamiltonianu H^0 ?

W rachunku zaburzeń równanie (5) można zapisać jako zespół równań rekurencyjnych:

$$\frac{d}{dt} a_k^{(0)}(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad a_n^{(0)}(t=0) = \delta_{ni}$$

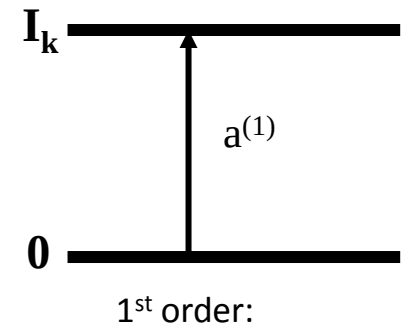
$$\frac{d}{dt} a_k^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n^{(0)}(t) \langle k | \hat{V}(\vec{r}(t)) | n \rangle \exp\left(\frac{-i(E_n - E_k) \cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\longrightarrow a_k^1(t) = \delta_{ni} - \frac{i}{\hbar} \int \langle k | \hat{V}(\vec{r}(t')) | i \rangle \exp\left(\frac{-i(E_i - E_k) \cdot t'}{\hbar}\right) dt'$$

Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu we wzbudzeniach kulombowskich

Obliczenia w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń są wiarygodne gdy $|a_k(t)| \ll 1$.
Jeśli ten warunek nie jest spełniony to obliczenia są wewnętrznie sprzeczne gdyż δ_{ni} nie jest już dobrym przybliżeniem $a_n(t)$.

- wzbudzany jest tylko jeden stan końcowy I_k , np. $0^+ \rightarrow 2^+$
- stany początkowy i wzbudzony nie są silnie sprzężone z innymi stanami jądrowymi,
- małe prawdopodobieństwa wzbudzeń (jądra około magiczne).

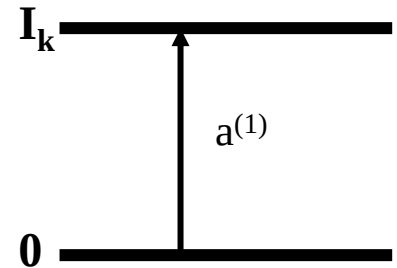


amplitudy wzbudzeń są wyrażone przez:

$$a_{nk} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle I_k | V(\vec{r}(t)) | I_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_0)t} dt \quad (17)$$

Amplitudy wzbudzeń w rachunku zaburzeń I rzędu

$$a_{0k} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle I_k | V(\vec{r}(t)) | I_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_0)t} dt$$



1st order:

Biorąc postać potencjału dla wzbudzeń **elektrycznych**:

$$V_T(E\lambda, \mu, \vec{r}(t)) = \sum_{\lambda \geq 1, \mu} \frac{4\pi Z_P e}{2\lambda + 1} (-1)^\mu \cdot \frac{1}{r(t)^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \cdot \hat{M}_T(E\lambda, -\mu)$$

Amplitudę wzbudzenia dla stanu k można zapisać w postaci:

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_P e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{(-1)^\mu}{2\lambda + 1} \langle I_k M_k | \hat{M}(E\lambda, -\mu) | I_0 M_0 \rangle I_{\lambda\mu}^E$$

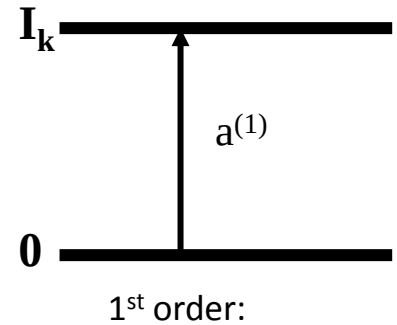
gdzie:

$$I_{\lambda\mu}^E = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i(E_k - E_0)t}{\hbar}\right) r^{-\lambda-1}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta(t), \varphi(t)) dt$$

→ całka orbitalna (orbital integral)

Amplitudy wzbudzeń w rachunku zaburzeń I rzędu

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_P e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{(-1)^\mu}{2\lambda+1} \langle I_k M_k | \hat{M}(E\lambda, -\mu) | I_0 M_0 \rangle I_{\lambda\mu}^E$$



Korzystając z zależności:

$$(-1)^\mu \hat{M}(E\lambda, -\mu) = \hat{M}(E\lambda, \mu)^\dagger$$

$$(-1)^\mu \langle I_k M_k | \hat{M}(E\lambda, -\mu) | I_0 M_0 \rangle \rightarrow \langle I_0 M_0 | \hat{M}(E\lambda, \mu) | I_k M_k \rangle^*$$

$$\langle I_0 M_0 | \hat{M}(E\lambda, \mu) | I_k M_k \rangle = (-1)^{I_0 - M_0} \begin{pmatrix} I_0 & \lambda & I_k \\ -M_0 & \mu & M_k \end{pmatrix} \langle I_0 || \hat{M}(E\lambda) || I_k \rangle$$

Amplitudę wzbudzenia dla stanu k można przepisać:

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_P e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2\lambda+1} (-1)^{I_0 - M_0} \begin{pmatrix} I_0 & \lambda & I_k \\ -M_0 & \mu & M_k \end{pmatrix} \langle I_0 || \hat{M}(E\lambda) || I_k \rangle I_{\lambda\mu}^E$$

Rachunek zaburzeń pierwszego rzędu - różniczkowy przekrój czynny na wzbudzenie elektryczne stanu $|k\rangle$

$$a_{k0} = \frac{4\pi Z_P e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2\lambda+1} (-1)^{I_0-M_0} \begin{pmatrix} I_0 & \lambda & I_k \\ -M_0 & \mu & M_k \end{pmatrix} \langle I_0 \parallel \hat{M}(E\lambda) \parallel I_k \rangle I_{\lambda\mu}^E$$

Prawdopodobieństwo wzbudzenia:

$$P_k = \frac{1}{2I_0+1} \sum_{M_k M_0} |a_{k0}^2|$$

gdy $I_0 \neq 0$

Różniczkowy przekrój czynny na wzbudzenie stanu k:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_k = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \cdot P_k \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \left(\frac{Z_P Z_T e^2}{4E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$


Różniczkowy przekrój czynny na wzbudzenie elektryczne stanu $|k\rangle$ w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń

zależy od **liczb atomowych jądra pocisku/tarczy, kąta rozproszenia, energii wiązki**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_k^E = \left(\frac{4\pi Z_{P/T} e}{\hbar}\right)^2 \sum_{\lambda} \frac{B(E\lambda)_{T/P}}{(2\lambda+1)^3} \sum_{\mu} |I_{\lambda\mu}^E|^2 \cdot \left(\frac{Z_P Z_T e^2}{4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

informacja o strukturze jądra
zawarta jest w zredukowanym
prawdopodobieństwie przejścia

człon związany z całkowaniem
po trajektorii Rutherforda $\rightarrow$
niezależny od struktury jądra

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}$$

$B(E\lambda; I_n \rightarrow I_k)$

$$B(E\lambda; I_0 \rightarrow I_k) = \frac{1}{2I_0 + 1} \langle I_k \| M(E\lambda) \| I_0 \rangle^2$$

